

Pour les étudiants qui n'ont pas eu l'occasion d'assister à la dernière séance du TD

III - L'hamiltonien: $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ avec $\vec{\mu} = g\mu_B \vec{J}$
on choisit $\vec{B} // \vec{z} \rightarrow H = -g\mu_B J_z B$

1. La fonction de partition est donnée par $Z = \text{Tr} e^{-\beta H}$

si on connaît les états propres de H avec les valeurs propres correspondantes $\rightarrow H = \sum_m E_m e^{-\beta E_m}$

Ceci est possible car les états propres de H sont les mêmes que ceux de J_z ($H = g\mu_B B J_z$). Or J_z a $2J+1$ états propres $|m\rangle$ de valeurs propres: $m = -J, \dots, J$.

$$\Rightarrow Z = \sum_{m=-J}^{+J} e^{\beta g\mu_B B m} = \sum_{m=-J}^{+J} e^{\eta m} \quad \text{avec } \eta = \beta g\mu_B B = \frac{g\mu_B B}{kT}$$

$$Z = e^{-J\eta} + e^{-(J-1)\eta} + \dots + e^{(J-1)\eta} + e^{J\eta}$$

$\begin{matrix} & \nearrow & & \nearrow \\ x e^{\eta} & & x e^{\eta} & \end{matrix}$

c'est la somme de $2J+1$ termes d'une progression (série) géométrique de première terme: $u_0 = e^{-J\eta}$ et de raison $q = e^{\eta} \Rightarrow Z = u_0 \frac{1-q^{2J+1}}{1-q}$

$$Z = e^{-J\eta} \frac{1 - e^{(2J+1)\eta}}{1 - e^{\eta}} = \frac{e^{-J\eta} - e^{(J+1)\eta}}{1 - e^{\eta}} = \frac{e^{-(J+1/2)\eta} - e^{(J+1/2)\eta}}{e^{\eta/2} - e^{-\eta/2}} \left(\times \frac{e^{\eta/2}}{e^{\eta/2}} \right)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\text{sh}((J+1/2)\eta)}{\text{sh}(\eta/2)} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{\text{sh}\left[(J+1/2) \frac{g\mu_B B}{kT}\right]}{\text{sh}\left(\frac{g\mu_B B}{2kT}\right)}}$$

2/ Valeur moyenne du moment magnétique: $\langle \mu_z \rangle$. $\mu_z = g\mu_B J_z$

$$\text{On peut utiliser la formule } \langle \mu_z \rangle = \frac{\sum_{m=-J}^{+J} g\mu_B m e^{\beta g\mu_B B m}}{Z}$$

$$\text{ou bien, on peut remarquer que } E = \langle H \rangle = -\langle \mu_z \rangle B \Rightarrow \langle \mu_z \rangle = -\frac{\langle H \rangle}{B}$$

$$\text{or } \langle H \rangle = -\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = -\frac{1}{Z} \cdot \frac{\partial \log Z}{\partial \eta} g\mu_B B = -g\mu_B B \frac{\text{sh}(\eta/2)}{\text{sh}((J+1/2)\eta)} \left[\frac{(J+1/2) \text{ch}(\eta/2) \text{sh} \eta/2 - \frac{1}{2} \text{ch} \eta \text{ch}(\eta/2)}{\text{sh}^2(\eta/2)} \right]$$

$$\Rightarrow \langle H \rangle = -g\mu_B B \left[\left(J + \frac{1}{2}\right) \coth \left(J + \frac{1}{2}\right) \eta - \frac{1}{2} \coth \frac{\eta}{2} \right]$$

$$\Rightarrow \langle H \rangle = -g\mu_B B J B_J(\eta) \text{ avec } B_J(\eta) = \frac{1}{J} \left[\left(J + \frac{1}{2}\right) \coth \left(J + \frac{1}{2}\right) \eta - \frac{1}{2} \coth \frac{\eta}{2} \right]$$

est la fonction de Brillouin.

$$\Rightarrow \langle \mu_z \rangle = g\mu_B J B_J(\eta)$$

$$3^\circ \quad g\mu_B B \ll kT \Rightarrow \eta \ll 1$$

$$\text{pour } x \ll 1 \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \approx \frac{1 + x^2/2}{x + x^3/6} \approx \frac{(1 + x^2/2)}{x} \left(1 + \frac{x^2}{6}\right)^{-1} \approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$$

$$\approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{6}\right) \approx \frac{1}{x} \left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow B_J(\eta) \approx \frac{1}{J} \left\{ \left(J + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{1}{\left(J + \frac{1}{2}\right) \eta} + \frac{\left(J + \frac{1}{2}\right) \eta}{3} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\eta} + \frac{\eta}{6} \right] \right\} \approx \frac{J+1}{3} \eta$$

$$\Rightarrow \langle \mu_z \rangle \approx \frac{g\mu_B J(J+1) \eta}{3} \approx \frac{g^2 \mu_B^2 B J(J+1)}{3kT}$$

L'aimantation de la substance est $M = \sum_{i=1}^N \mu_{zi} \Rightarrow \langle M \rangle = N \langle \mu_z \rangle$

La susceptibilité magnétique est donnée par:

$$\chi = \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial B} \rightarrow \chi = \frac{N g^2 \mu_B^2 J(J+1)}{3kT}$$

c'est la loi de Curie

$$4^\circ \quad g\mu_B B \gg kT \Rightarrow \eta \gg 1$$

$$\Rightarrow \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \sim 1$$

$$B_J(\eta) \sim \frac{1}{J} \left[\left(J + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right] \sim 1$$

$$\Rightarrow \langle \mu_z \rangle = g\mu_B J$$

(N.B: c'est la valeur maximale du ~~fact~~ moment magnétique d'un atome; ceci est due au fait que pour $g\mu_B B \gg kT$; le champ magnétique arrive à gagner la compétition contre le désordre imposé par la température et fait orienter le moment de l'atome dans sa direction.

$$5^\circ \text{ Entropie: } S_a = k \log Z_a + \frac{E_a}{T} \text{ (pour un atome) } (E_a = \langle H \rangle \text{ voir question 2'})$$

$$= k \log Z_a + g\mu_B B J B_J(\eta) \cdot \frac{1}{T}$$

$$\text{Pour } N \text{ Atomes: } S = N S_a = N k \left[\log \frac{\sinh \left(J + \frac{1}{2}\right) \eta}{\sinh \frac{\eta}{2}} - \frac{g\mu_B B J B_J(\eta)}{kT} \right]$$

$$S = N k \left[\log \frac{\sinh \left(J + \frac{1}{2}\right) \eta}{\sinh \frac{\eta}{2}} - \eta J B_J(\eta) \right]$$

Variations de S en fonction de η :

* pour $\eta \gg 1$: $B_J(\eta) \approx 1$

$$Z_a = \frac{\text{sh}(\frac{J+1}{2})\eta}{\text{sh} \frac{\eta}{2}} \sim \frac{e^{\frac{(J+1)}{2}\eta} - e^{-\frac{(J+1)}{2}\eta}}{e^{\eta/2} - e^{-\eta/2}} \sim e^{J\eta}$$

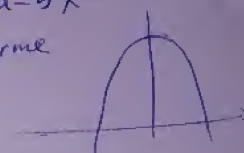
$$\Rightarrow S = Nk [\log e^{J\eta} - \eta J] \Rightarrow \underline{S=0}$$

* pour $\eta \ll 1$: $B_J(\eta) \approx \frac{J+1}{3} \eta$

$$Z_a = \frac{\text{sh}(\frac{J+1}{2})\eta}{\text{sh} \frac{\eta}{2}} \approx \frac{(\frac{J+1}{2})\eta}{\frac{\eta}{2}} \sim 2J+1$$

$$\Rightarrow S = Nk \left[\log(2J+1) - \frac{2}{3} \frac{J(J+1)}{3} \right] \rightarrow \text{Branche parabolique}$$

$f(x) \sim a - bx^2$
↳ forme



La valeur $S_{\max} = Nk \log(2J+1)$ est maximale pour S ; elle correspond au désordre maximal où chaque atome peut prendre de manière équiprobable chacune des valeurs de J_z qui sont de $2J+1$ valeurs.

6°/ a.

Etat initial		Etat final
S_i	Transformation adiabatique	S_f
T_i		$T_f = ?$
B_i		$B_f = 0$

Transformation adiabatique $\Rightarrow S_f(\eta_f) = S_i(\eta_i)$

$$\Rightarrow \eta_f = \eta_i \Rightarrow \frac{g_B B_f}{k T_f} = \frac{g_B B_i}{k T_i} \Rightarrow T_f = \frac{B_f}{B_i} \cdot T_i = 0$$

$$T_f = 0^\circ \text{K} \quad \forall B_i$$

Ce résultat n'est pas correct de manière physique; il est basé sur une expression de l'entropie obtenue à partir d'une expression idéale qui suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les moments de différents atomes.

b. Entropie réelle $S = Nk [\log Z_a - \eta J B_J(\eta)] - \frac{A}{2T^2}$; si on pose $S_i = S_f$ avec $\eta_i = 0$ on peut calculer $T_f \Rightarrow A \cdot N$: $T_f = 3,26 \cdot 10^{-2} \text{°K}$.